MAI 1– 10. cvičení - limita, spojitost a derivace funkce.

Definice limity funkce a výpočet limit funkcí – příklady z minulého cvičení a dále:

($\log x$ je přirozený logaritmus , $\exp(x) = e^x$)

1. Víme-li, že $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, spočítejte limity ,nebo ukažte, že neexistují (limita složené funkce) :

   a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log x}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)}$;

   $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(e^{\frac{1}{x}} - 1)$; $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(2^{\frac{1}{x}} - 1)$ $\lim\limits_{x\to\infty} x \log(1 - \frac{2}{x})$.

   b) Definujme $f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\cdot\log f(x))$. Spočítejte $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x$.

2. Definujte a vyšetřete vlastnosti funkce inverzní k funkci

   a) $\sin x$ na intervalu $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (fce $\arcsin x$); b) $tg\, x$ na intervalu $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ (fce $arctg\, x$).

3. Limity s cyklometrickými funkcemi $\arcsin x$, $arctg\, x$:

   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctg\, x}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{arctg\, x}{x^2 - x}$; $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{arctg\, x}{x^2 - x}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{arctg\, x}{x^2 - x}$;

   $\lim\limits_{x\to\infty} \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty} \arcsin\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$; $\lim\limits_{x\to ?} arctg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$.

7. Vyšetřete, zda lze v bodě $a = 0$ spojitě dodefinovat (a lze-li, tak dodefinujte) funkci f, která je pro $x \neq 0$ dána předpisem

   (i) $f(x) = x\, arctg \dfrac{1}{x}$; (ii) $f(x) = \dfrac{\ln(4x^2+1)}{x^2}$; (iii) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Výpočet derivace funkce .

Určete definiční obory a obory, kde existují derivace následujících funkcí a tyto derivace vypočítejte :

$f(x) =$: $\dfrac{1}{x} + 4x^2$; $\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$; $x + \sin x$; $x^2 \sin x$; $x \ln(x-3)$; $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; $\dfrac{x^3}{x^2-1}$; $\dfrac{2}{(x^3-2)^2}$;

$x - 2\, arctg\, x$;

$\sqrt{\dfrac{x-3}{x+2}}$; $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; $\sqrt{1+\sin 4x}$; $\cos\sqrt{x}$; $x^2 e^{-x}$; $e^{\frac{1}{x}} - x$; $\exp\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$; $\dfrac{e^{-x}}{2-x}$; $\sqrt{x}\, arctg\sqrt{x}$;

$x^2.\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;

$x^3 \ln(arctg 2x)$; $e^{-3x^2}.\cos(\ln 2x)$; $\sqrt{x^2+1}\, arctg(\sin 2x)$; $arctg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$; $\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$;

$\arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$; $|arctg\, x|$; $|arctg^3 x|$;